

پاسخنامه تشریحی

برای یافتن نقاط برخورد توابع $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$ و $y = x - 2$ باید معادله زیر را حل کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$$

حال ۲ و ۱- را در معادله اولیه امتحان می‌کنیم:

$$x = -1 \Rightarrow \sqrt{2 + 5 + 2} = -1 - 2 \Rightarrow \sqrt{9} = -3 \text{ غلط} \Rightarrow x = -1 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{8 - 10 + 2} = 2 - 2 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ جواب}$$

بنابراین معادله یک جواب دارد.

۸ ساعت و ۴۵ دقیقه یعنی $8\frac{3}{4}$ ساعت که می‌شود $\frac{35}{4}$ ساعت. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

نکته: اگر شخص اول کاری را در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم آن کار را در C ساعت انجام دهند، داریم:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

اگر فرض کنیم مهدی کار را در x ساعت انجام می‌دهد، علی آن کار را ۶ ساعت زودتر یعنی در $x - 6$ ساعت انجام می‌دهد. با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{35}{4}} \Rightarrow \frac{x+x-6}{x^2-6x} = \frac{4}{35} \Rightarrow 4x^2 - 24x = 70x - 210 \Rightarrow 4x^2 - 47x + 105 = 0$$

دلتا را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = (-47)^2 - 4(2)(105) = 1369$$

$$x = \frac{47 \pm \sqrt{1369}}{4} = \frac{47 \pm 37}{4} \xrightarrow{x > 6} \begin{cases} x = 2,5 \times \\ x = 21 \checkmark \end{cases}$$

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با ریشه‌های x_1 و x_2 داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

حال فرض می‌کنیم:

$$x_1 = a + b + c, \quad x_2 = a + c - b$$

فرض می‌کنیم $x_1 > x_2$ پس داریم:

$$x_1 - x_2 = a + b + c - a - c + b$$

$$x_1 - x_2 = 2b = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2|a|b \Rightarrow \Delta = 4a^2b^2$$

ابتدا توجه کنید که: (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g^2(x) + 1} = \sqrt{2x^2 - 4 + 1} = \sqrt{2x^2 - 3}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2f^2(x) - 4} = \sqrt{2(x^2 + 1) - 4} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

بنابراین باید معادله $2\sqrt{2x^2 - 3} = 2\sqrt{2x^2 - 2}$ را حل کنیم.

$$2x^2 - 2 = 4(2x^2 - 3) \Rightarrow 6x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}}, \quad x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

توجه کنید که $D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ؛ بنابراین جواب‌های به دست آمده قابل قبول نیستند زیرا در دامنه g قرار ندارند.

شرط اینکه هر دو ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر صفر باشد این است که b و c هر دو با هم صفر شوند: (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$\begin{cases} m + 2n + 1 = 0 \\ m - 2n + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m + 2n = -1 \\ m - 2n = -5 \end{cases} \\ \hline 2m = -6 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow n = 1$$

۶ احتمال خارج شدن مهره سفید از ظرف اول برابر $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ است. اگر یک مهره سفید به ظرف دوم اضافه کنیم، این ظرف شامل یک مهره سفید و ۴ مهره سیاه

می شود که در نتیجه احتمال خارج شدن مهره سفید برابر $\frac{1}{5}$ است. با اضافه کردن یک مهره سفید به ظرف سوم، این ظرف شامل ۵ مهره سفید خواهد بود و در نتیجه احتمال خروج مهره سفید از این ظرف برابر ۱ می باشد. بنابراین احتمال آنکه هر سه مهره خارج شده سفید باشند، برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{10}$$

۷ با استفاده از فرمول احتمال داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تعداد حالت های
مطلوب
↑
n(A)
↓
فضای مطلوب

تعداد کل حالات
↓
n(S)

تعداد کل حالات که جابه جایی ۱۰ فرد در کنار یکدیگر است. $\Rightarrow$ فرد اول ۱۰ حالت دارد و فرد دوم ۹ حالت و به همین ترتیب داریم:

$$n(S) = 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1 = 10!$$

برای به دست آوردن حالات مطلوب داریم:

$$n(A) = \begin{matrix} 2^5 & \times & 5! \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{جابه جایی هر فرد} & & \text{جابه جایی ۵ زوج} \\ \text{با همسر خودش} & & \end{matrix}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2^5 \times 5!}{10!}$$

۸ با استفاده از فرمول احتمال داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{\binom{6}{4} \times 4!} = \frac{1}{360}$$

تعداد یک حالت
درست وجود دارد
↑
1

تعداد حالت مطلوب
↑
n(A)
↓
تعداد کل حالات

تعداد یک حالت
درست وجود دارد
↑
1

تعداد حالت مطلوب
↑
n(A)
↓
تعداد کل حالات

تعداد یک حالت
درست وجود دارد
↑
1

تعداد حالت مطلوب
↑
n(A)
↓
تعداد کل حالات

۹ اگر پیشامد A داشتن فقط یک برادر کوچک تر و پیشامدهای B_1, B_2, B_3 و B_4 به ترتیب انتخاب فرزندان اول، دوم، سوم و چهارم باشند، آن گاه پیشامدهای $(A|B_1), (A|B_2), (A|B_3)$ و $(A|B_4)$ به ترتیب به صورت «فقط یکی از فرزندان دوم تا چهارم پسر باشند»، «فقط یکی از فرزندان سوم و چهارم پسر باشند» و «فرزند چهارم پسر باشد» تعریف می شوند. همچنین پیشامدهای A و B_4 ناسازگارند، پس پیشامد $(A|B_4)$ تهی است. در نتیجه داریم:

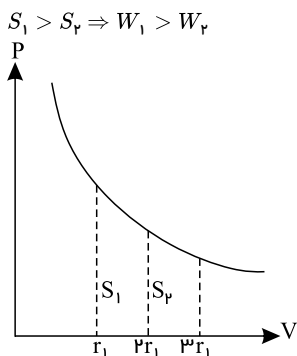
$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\binom{3}{1}}{2^3} + \frac{1}{4} \times \frac{\binom{2}{1}}{2^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{32} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{32} + \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{11}{32}$$

۱۰ عبارت (ب)، نادرست است. متغیرهای ترمودینامیکی مستقل از یکدیگر نیستند و با هم رابطه دارند.

عبارت (ث)، نادرست است. برای بیان حالت مقدار معینی گاز باید حداقل دو کمیت آن معلوم باشد.

۱۱ با توجه به نمودار $P - V$ مقابل و با توجه به این نکته که مساحت بین نمودار $P - V$ و محور V برابر قدر مطلق کار انجام شده است، داریم:



توجه: در انبساط کار انجام شده توسط گاز مثبت است.

۱۲) ابتدا فشار گاز در حالت A را به دست می آوریم:

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} = \frac{15 \times 730}{1,5} = 7300 \text{ Pa} = 7,3 \text{ kPa}$$

اکنون مساحت درون چرخه را محاسبه می کنیم:

$$S = (7,3 - 1,3) \times 10^3 \times (2,25 - 1,5) = 4500 \text{ J} = 4,5 \text{ kJ}$$

در چرخه پادساعتگرد کار محیط روی سیستم، مثبت و کار سیستم روی محیط منفی است. پس کار محیط روی سیستم برابر است با:

$$W = +4,5 \text{ kJ}$$

۱۳) در ماشین گرمایی بازده از رابطه $\eta = \frac{|W|}{Q_H}$ به دست می آید. از طرفی با جایگذاری $Q_H = |W| + |Q_L|$ در رابطه قبل داریم:

$$\eta = \frac{Q_H - |Q_L|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

برای ماشین (۲) داریم:

$$\eta_2 = 1 - \frac{|Q_{L_2}|}{Q_{H_2}} \quad \eta_2 = \frac{3}{10} \rightarrow \frac{3}{10} = 1 - \frac{0,42 Q_{H_1}}{Q_{H_2}}$$

$$\xrightarrow{Q_{H_2} = |Q_{L_1}|} \frac{3}{10} = \frac{42}{100} \times \frac{Q_{H_1}}{|Q_{L_1}|} \Rightarrow \frac{|Q_{L_1}|}{Q_{H_1}} = \frac{6}{10}$$

در نتیجه برای بازده ماشین (۱) خواهیم داشت:

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_{L_1}|}{Q_{H_1}} = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10} = 40\%$$

۱۴) با توجه به معادله حالت گازهای کامل برای مقدار معینی از یک گاز کامل داریم:

$$PV = nRT \xrightarrow[n: \text{ثابت}]{R: \text{ثابت}} T \propto PV$$

از طرفی می دانیم که انرژی درونی مقدار معینی از یک گاز کامل تابعی از دمای مطلق آن است، یعنی:

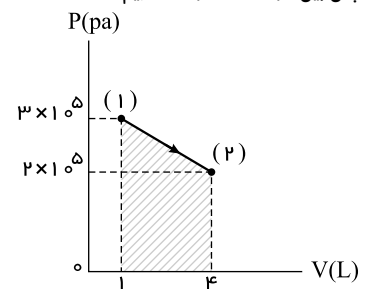
$$\begin{cases} n = \text{ثابت} \\ U \propto T \end{cases}$$

پس در نهایت داریم:

$$U \propto PV$$

پس بین دو نقطه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} \xrightarrow{U_1 = 750 \text{ J}} \frac{U_2}{750} = \frac{4 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{3 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3}} \Rightarrow U_2 = 2000 \text{ J}$$



حال با توجه به قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W = -S_{P-V}]{\Delta U = 2000 - 750 = 1250 \text{ J}} 1250 = Q - \frac{3 \times 10^5 + 2 \times 10^5}{2} \times (3 \times 10^{-3}) \Rightarrow Q = 2000 \text{ J}$$

۱۵) عبارت های (آ)، (ب) و (ت) نادرست اند.

۵ الکترون با $n = 3, l = 2$ (زیر لایه ۳d) دارد $\rightarrow 1s^2/2s^2 2p^6/3s^2 3p^6 3d^5/4s^1$

۷ الکترون در زیر لایه های s ($l = 0$) خود دارد $\rightarrow 1s^2/2s^2 2p^6/3s^2 3p^6/4s^1$

(ب) در اتم گالیوم، در مجموع ۱۹ الکترون در زیر لایه های ۳d، ۴s، ۴p و ۳p با $n + l \geq 4$ وجود دارد.

۳۱ Ga: $1s^2/2s^2 2p^6/3s^2 3p^6 3d^{10}/4s^2 4p^1$

مجموعاً ۱۲ الکترون با $l = 1$ (زیر لایه های p) دارد $\rightarrow \frac{12}{10} = 1,2$
مجموعاً ۱۰ الکترون با $l = 0$ و $l = 2$ (زیر لایه های s و d) دارد

$$X: 1s^2/2s^2 2p^6/3s^2 3p^6 3d^9/4s^2 \rightarrow \text{آرایش الکترونی فشرده} \rightarrow [18Ar]3d^9 4s^2$$

برای رسم آرایش الکترونی فشرده از گاز نجیب قبل تر از عنصر باید استفاده کنیم.

۱۶) ۱ ۲ ۳ ۴ عبارتهای آ، پ و ت صحیح است.

۲ = l مربوط به زیرلایه d است که در همه عنصرهای دسته p دوره چهارم، دارای ده الکترون است. بنابراین لایه ظرفیت عنصر A دارای ۵ الکترون است.

$$A: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^3 \Rightarrow \cdot \ddot{A} \cdot$$

بررسی عبارتهای:

مورد آ: عنصر A دارای ۳ الکترون منفرد است و عنصر $\cdot \ddot{A} \cdot$ نیز دارای ۳ الکترون منفرد است.

مورد ب: عنصر A در شرایط مناسب با به اشتراک گذاشتن الکترون به آرایش گاز نجیب می‌رسد.

مورد پ: عنصر A در گروه ۱۵ جدول تناوبی قرار دارد و عنصر ${}_{15}P$ دارای عدد اتمی ۱۵ است.

مورد ت: عدد اتمی عنصر A برابر ۳۳ است. زیرا:

$$n = p + 9 \Rightarrow n = 33 + 9 = 42$$

$$A = 33 + 42 = 75 \text{ عدد جرمی}$$

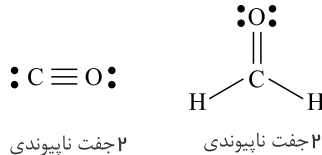
۱۷) ۱ ۲ ۳ ۴ موارد (آ) و (ت)، جمله داده شده را به درستی کامل می‌کنند.

(آ) ۷۵٪ از جرم هواکره را لایه تروپوسفر تشکیل می‌دهد.

(ت) میانگین بخار آب در هوا حدود یک درصد است و ۹۹٪ بخار آب در لایه تروپوسفر وجود دارد.

با توجه به روند تغییر دما و فشار در هواکره، کم‌ترین مقدار دما و فشار هوا مربوط به لایه تروپوسفر نخواهد بود.

۱۸) ۱ ۲ ۳ ۴

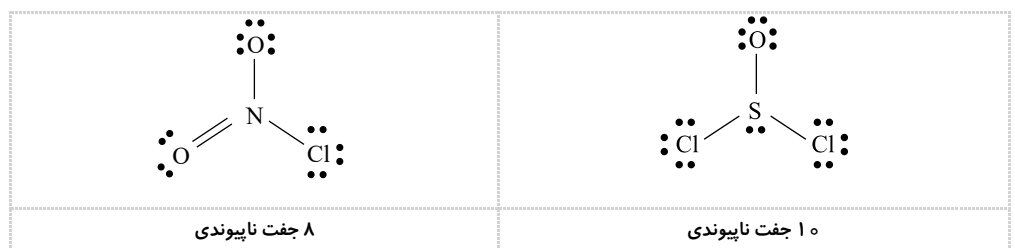


بررسی سایر گزینه‌ها:

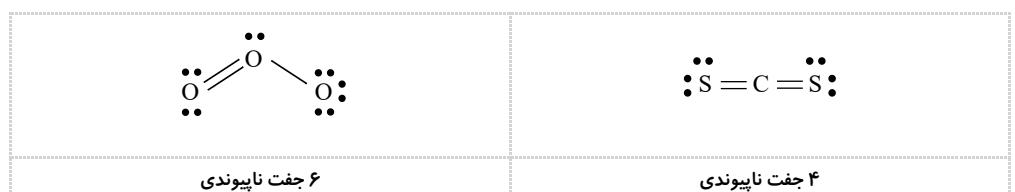
گزینه ۱)



گزینه ۲)



گزینه ۴)



۱۹) ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا جرم CaCl_2 موجود در محلول را محاسبه کنیم:

$$12,04 \times 10^{-2} \text{ Cl}^- \times \frac{1 \text{ mol Cl}^-}{6,02 \times 10^{23} \text{ Cl}^-} \times \frac{1 \text{ mol CaCl}_2}{2 \text{ mol Cl}^-} \times \frac{111 \text{ g CaCl}_2}{1 \text{ mol CaCl}_2} = 0,111 \text{ g}$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{0,111}{22,2} \times 10^6 = 5000$$

جرم $CaCl_2$ را در یک کیلوگرم محلول محاسبه می‌کنیم:

$$ppm = \frac{\text{جرم } CaCl_2}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 5000 = \frac{x}{1kg} \times 10^6 \Rightarrow x = 0,005kg CaCl_2$$

$$0,005kg CaCl_2 \times \frac{1000g CaCl_2}{1kg CaCl_2} \times \frac{1mol CaCl_2}{111g CaCl_2} \times \frac{1mol Ca^{2+}}{1mol CaCl_2} \times \frac{40g Ca^{2+}}{1mol Ca^{2+}} \simeq 1,8g Ca^{2+}$$

گشتاور دو قطبی آب ۱٫۸۵ (بای) است که از دو برابر گشتاور دو قطبی هیدروژن سولفید ۰٫۹۷ (بای) کمتر است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰در مورد گزینه ۴ دقت کنید که مولکول‌های H_2O در حالت گاز، پیوند هیدروژنی تشکیل نمی‌دهد اما در حالت مایع، به‌طور میانگین می‌تواند ۲ پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.